Научная статья
УДК 517.95
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-93-112

О РАДИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ $P(|X|)$-ЛАПЛАСИАНОМ

Арис Саввич Терсенов[1]
Расул Чориёр угли Сафаров[2]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН
Новосибирск, Россия,

[2]Новосибирский научно-исследовательский государственный университет
Новосибирск, Россия,
Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан,

[1]aterseno@math.nsc.ru:https://orcid.org/0009-0005-2748-8020
[2]r.safarov1@nsu.ru

Аннотация

Изучается задача Дирихле для уравнения с сингулярным $p(|x|)$-лапласианом с младшими членами, имеющими произвольный рост по градиенту. Доказано существование слабого радиально симметричного решения, удовлетворяющего уравнению почти всюду.

Ключевые слова и фразы

Ключевые слова: уравнение с $p(|x|)$-лапласианом, радиально симметричные решения, априорные оценки.

Источник финансирования

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF - 2026-0028)

Для цитирования

Терсенов А. С., Сафаров Р. Ч. О радиально симметричных решениях для эллиптического уравнения с сингулярным $p(|x|)$-лапласианом // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 2, С. 93-112. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-93-112

On radially symmetric solutions for the elliptic equation with singular $p(|x|)$-Laplacian

Aris S. Tersenov[1], **R. Ch. Safarov**[2],

[1]Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russia

[2]Novosibirsk State University,Novosibirsk, Russia
Karshi State University, Karshi, Uzbekistan

[1]aterseno@math.nsc.ru:https://orcid.org/0009-0005-2748-8020
[2]r.safarov1@nsu.ru

Abstract

We study the Dirichlet problem for the singular $p(|x|)$-Laplacian with lower-order terms growing arbitrarily with respect to the gradient. We prove the existence of a weak radially symmetric solution that satisfies the equation almost everywhere.

Keywords

$p(|x|)$-Laplacian, radially symmetric solutions, a priori estimates.

Funding

The work of the first author was carried out within the framework of the state assignment of the IM SB RAS (project FWNF - 2026-0028)

For citation

Tersenov A. S., Safarov R. Ch., On radially symmetric solutions for the elliptic equation with singular $p(|x|)$-Laplacian // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 2, P. 93-112. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-93-112

§ 1. Введение и основные результаты

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-div(|\nabla u|^{p(|x|)-2}\nabla u) = F(x,u,\nabla u) \quad \text{в} \quad B_R \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial B_R, \tag{1.2}$$

где B_R – шар радиуса R, ∂B_R – граница B_R, $1 < p(|x|) < 2$. Наличие в уравнении градиентных членов существенно осложняет применение вариационных методов исследования разрешимости задачи (1.1), (1.2). Отметим также, что уравнения вида (1.1) обладают важным свойством: они не являются масштабно-инвариантными, что делает неприменимыми многие традиционные методы исследования разрешимости и анализа качественных свойств решений.

Нас интересуют радиально симметричные решения краевых задач для (1.1), когда функция $F(x, u, q)$ является нелинейной как по u, так и по q, причем нелинейность по u такова, что (1.1) не удовлетворяет принципу максимума для гладких функций. В связи с этим, мы ограничимся ссылками на те работы, в которых такие исследования проводились. Если говорить о работах, в которых присутствуют градиентные члены, то можно отметить [1], [2], где с помощью аппроксимационных методов доказывается существование слабых решений краевых задач для (1.1) при постоянном p. Также при постоянном p, в работах [3]–[7] с помощью различных топологических методов, основанных на теоремах лиувиллевского типа, на методе суб-/суперрешений с последующим применением теоремы Красносельского, доказаны аналогичные результаты. Что касается работ, в которых исследовались радиально симметричные решения при $p = p(|x|)$, отметим работы [8], [9], в которых с помощью методов вариационного исчисления было доказано существование слабых соболевских радиально симметричных решений. В [10] рассматривалась задача с $p = p(|x|)$ и градиентными членами, в которой было доказано существование разрушающихся на границе радиально симметричных решений.

Во всех вышеперечисленных работах функция $F(x, u, q)$ удовлетворяет условию Бернштейна–Нагумо

$$|F(x,u,q)| \le c\left(1+|q|^{p(x)}\right) \quad \text{для} \quad (x,u,q) \in \overline{\Omega} \times [-M, M] \times \mathbb{R}^n, \qquad (1.3)$$

с некоторой постоянной c, при условии, что решение удовлетворяет условию $\max|u| \le M$ с некоторой постоянной M.Нас интересует разрешимость краевых для задач для (1.1) в случае, когда функция $F(x, u, q)$ имеет произвольный рост по переменной q. В связи с этим отметим результаты статьи [11] для постоянного p, где с помощью метода суб-/суперрешений были получены результаты о существовании решения при нарушении условия (1.3), при определенных условиях малости на коэффициенты уравнения. Нелинейность по градиенту предполагается не более чем полиномиальная.

В [12], [13] было доказано существование радиально симметричных решений задачи Дирихле для (1.1) без каких-либо условий малости, когда показатель p постоянен и условие (1.3) не имеет места. Новизна результатов данной работы заключается в получении аналогичных результатов в случае, когда показатель $1 < p < 2$ зависит от $|x|$. Отметим также, что наши результаты о разрешимости допускают произвольную нелинейность F по q, в том числе и экспоненциальную.

Итак, нас интересует существование ограниченных радиально симметричных решений задачи (1.1), (1.2). Будем предполагать, что функция $F(x, u, \nabla u)$ может быть представлена в виде $F(r, u, u_r)$ при замене переменных $r = |x|$. Примерами таких функций являются, например, функции вида

$$F(|x|, u, |\nabla u|), \quad F(|x|, u, x \cdot \nabla u),$$

где $x \cdot \nabla u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_{x_i}$. В дальнейшем производную функции u по переменной r мы будем обозначать u'. Хорошо известно, что ограниченное радиально симметричное решение (1.1), (1.2) удовлетворяет уравнению

$$-(|u'|^{p(r)-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p(r)-2}u' = F(r, u, u'), \quad r \in (0, R), \tag{1.4}$$

и краевым условиям

$$u'(0) = 0, \quad u(R) = 0. \tag{1.5}$$

В силу сингулярности уравнения (1.4), его решения могут не принадлежать пространству дважды непрерывно дифференцируемых функций. В связи с этим дадим определение того, что мы понимаем под решением задачи (1.4), (1.5).

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $u(r)$ является *слабым решением* задачи (1.4), (1.5), если $u(r) \in \mathbb{C}^{1,1}(0, R) \cap \mathbb{C}^1[0, R)$, удовлетворяет (1.5), и имеет место интегральное тождество

$$\int_0^R |u'(r)|^{p(r)-2} u'(r)\phi'(r)dr =$$

$$\int_0^R \frac{n-1}{r}|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\phi(r)dr + \int_0^R F(r, u(r), u'(r))\phi(r)dr,$$

$$\forall \phi(r) \in \mathbb{C}_0^\infty(0, R).$$

В силу указанной в определении гладкости искомого решения, краевые условия (1.5) понимаются в обычном смысле.

Для простоты изложения, ограничимся случаем, когда F имеет вид

$$F(r, u, u') = u|u|^{m-1} + g(r, u, u') + f(r), \quad g(r, u, 0) = 0, \quad m > 0, \tag{1.6}$$

а f не обращается тождественно в ноль.

Будем считать, что $p(r) \in \mathbb{C}^2(0, R) \cap \mathbb{C}^1[0, R]$ и принимает следующие значения

$$1 + \delta_1 \le p(r) \le 2 - \delta_2, \quad r \in [0, R], \tag{1.7}$$

где δ_i, $i = 1, 2$ – некоторые положительные постоянные, удовлетворяющие $\delta_1 + \delta_2 \le 1$. Введем постоянную α следующим образом. Будем говорить, что $\alpha \in \mathbb{A}$, если $1-\delta_2 < \alpha$ и выполнено $(u'^{\alpha})^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} = |u'|^{p(r)-2}$. В качестве α можно взять $\alpha = \frac{l}{k} > 1-\delta_2$, где l — четное число, k — целое положительное число. Эта постоянная будет использована как параметр регуляризации исходной задачи. Определим следующее множество $\mathbb{V} =$

$$\left\{ M > 0 \,\Big|\, \left(\frac{M}{R}\right)^{p(r)-1} \left(\frac{n-1}{r} - |p'(r)| \ln\left(\frac{M}{R}\right)\right) > \pm F_{\pm} + M^m,\ \forall r \in (0,R) \right\}, \tag{1.8}$$

где

$$F_+ = \max_{[0,R]\times[0,M]} \left(f(r) + g\left(r, u, -\frac{M}{R}\right)\right),$$

$$F_- = \min_{[0,R]\times[0,M]} \left(f(r) + g\left(r, u, \frac{M}{R}\right)\right).$$

Положим

$$M_0 = \inf_{M\in\mathbb{V}} \mathbb{V}, \quad f_0 = \max_{r\in[0,R]} |f(r)|. \tag{1.9}$$

Введем постоянную C, удовлетворяющую неравенству

$$C > \max_{r\in[0,R]} \left\{ 1, \left(\frac{M^m + f_0}{(p(r)-1)(1+R)^{p(r)-2}}\right)^{\frac{1}{p(r)-1}}, \frac{2M}{R(R+2)} \right\}. \tag{1.10}$$

Предположим, что $g(r,u,u')$ удовлетворяет условиям

$$|g(r,u,q) - g(s,u,q)| \le K(r,s,u,q)(r-s) \tag{1.11}$$

для $r,s \in (0,R)$, $0 < r-s$, $|u| \le M$, $q \in [-(1+R)C, C] \cup [C, (1+R)C]$, где $K \ge 0$,

$$g(r,u_2,q) - g(r,u_1,q) \ge \gamma(r,u_1,u_2,q)(u_1-u_2) \tag{1.12}$$

для $r \in (0,R)$, $|u_1|, |u_2| \le M$, $u_1 > u_2$, $q \in [-(1+R)C, C] \cup [C, (1+R)C]$, где $\gamma(r,u_1,u_2,q) \ge 0$. Обозначим через $\mathbb{W}$ следующее множество

$$\mathbb{W} = \{(r,s) \in (0,R), 0 < r-s, (r,s) \in (0,R), 0 < r-s,$$

$$|u_1|, |u_2| \le M, u_1 - u_2 \ge C\left(1 + R - \frac{1}{2}(r-s)\right)(r-s)\}.$$

Предположим, что для любых $(r,s,u_1,u_2) \in \mathbb{W}$ выполнено

$$K(r,s,u_1,\pm C\left[(1+R)-(r-s)\right])-$$

$$\gamma(r,u_1,u_2,\pm C\left[(1+R)-(r-s)\right])C\left(1+R-\frac{1}{2}(r-s)\right) \le 0. \tag{1.13}$$

при $s > r, q > 0, u_1 > u_2$. Предположим, что g и f удовлетворяют условию

$$\mathbb{V} \neq \varnothing. \tag{1.14}$$

Теорема 1.2. *Предположим, что* $p(r) \in \mathbb{C}^2(0,R) \cap \mathbb{C}^1[0,R]$ *удовлетворяет* (1.7), $p'(r) \le 0$, $p''(r) \le 0$, *а* $F(r,u,u')$ *из* (1.6), *непрерывна по совокупности своих аргументов и удовлетворяет* (1.11) – (1.14). *Тогда существует слабое решение задачи* (1.4), (1.5), *удовлетворяющее неравенству*

$$|u(r)| \le M_0, \quad |u'(r)| \le C, \quad r \in [0,R].$$

где M_0 *из* (1.9), C *из* (1.10).

Сделаем несколько замечаний касаемо выполнимости условий (1.11)–(1.13) и (1.14). Заметим, что (1.8) представляет из себя условия малости на входные параметры задачи. Легко видеть, что множество $\mathbb{V}$ не пусто при любых $F_\pm$ и $m > 0$, при достаточно малых R, т.е при достаточно малых размерах области.

Рассмотрим теперь ситуацию с фиксированными размерами области. Из (1.10) следует, что постоянная C может быть выбрана сколь угодно большой. Таким образом, например, функция $g = ru'^{2k+1} - u|u'|^\nu$ удовлетворяет (1.11)–(1.13) при $2k \le \nu$, где k – неотрицательное целое число (см. [13]). В то же время для указанной g, имеет место неравенство

$$|F_\pm| \le f_0.$$

Для того, чтобы (1.14) имело место достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\left(\frac{M}{R}\right)^{p(r)-1}\left(\frac{n-1}{R} - p_0\, ln\left(\frac{M}{R}\right)\right) > f_0 + M^m,\ \forall r \in (0,R),\ p_0 = \max|p'(r)|. \tag{1.15}$$

Положим $M \le \min\{1,R\}$. Легко видеть, что для таких значений M и произвольных p_0, $m > 0$, всегда существует $f_0 > 0$ такое, что (1.15) имеет место. Таким образом, мы получаем условие малости на $\max_{r\in[0,R]}|f(r)|$.

Для доказательства теоремы 1.2, мы регуляризуем уравнение (1.4) и доказываем классическую разрешимость регуляризованной задачи, основываясь на технике, разработанной в [12], [13], и используя принцип неподвижной точки. Далее, мы используем процедуру предельного перехода для получения слабого решения задачи (1.4), (1.5). Главным отличием настоящей статьи является рассмотрение сингулярного случая для переменного показателя $p = p(|x|)$.

Статья организована следующим образом. В параграфе 2 мы получаем априорную оценку классического решения регуляризованной задачи.

Параграф 3 посвящен получению априорной оценки производной классического решения регуляризованной задачи. В параграфе 4 приводится доказательство одной вспомогательной леммы (лемма 4.1), на которой базируется доказательство существования классического решения регуляризованной задачи (см. теорему 4.2), а также доказательство существования слабого, в смысле определения 1.1, решения задачи (1.4), (1.5) (см. теорему 1.2).

§ 2. Априорная оценка решения регуляризованной задачи

Для произвольной постоянной $M \in \mathbb{V}$ введем следующие две срезки

$$U_M(z) = \begin{cases} M^m, & z > M, \\ z|z|^{m-1}, & |z| \le M, \\ -M^m, & z < -M, \end{cases} \qquad g_M(r,z,p) = \begin{cases} g(r,M,p), & z > M, \\ g(r,z,p), & |z| \le M, \\ g(r,-M,p), & z < -M. \end{cases}$$

Вместо уравнения (1.4) будем рассматривать следующую его регуляризацию

$$-((u'^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u')' - \frac{n-1}{r}(u'^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u' = U_M(u)+g_M(r,u,u')+f(r), \quad (2.1)$$

где постоянная $\alpha \in \mathbb{A}$. Перепишем уравнение (2.1) в недивергентном виде

$$-a_\varepsilon(r,u')u'' - \frac{n-1}{r}(u'^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u' - b_\varepsilon(r,u') = U_M(u)+g_M(r,u,u')+f(r), \quad (2.2)$$

где $a_\varepsilon(r,z) = (z^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}-1}((p(r)-1)z^\alpha+\varepsilon)$, $b_\varepsilon(r,z) = \frac{1}{\alpha}p'(r)z(z^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}\ln(z^\alpha+\varepsilon)$. Очевидно, $a_\varepsilon(r,z) = a_\varepsilon(r,-z)$.

Будем исследовать существование классического решения задачи (2.2), (1.5). Для этого дадим определение этого понятия.

Определение 2.1. Функцию $u(r) \in \mathbb{C}^2(0,R) \cap \mathbb{C}^1([0,R))$, удовлетворяющую уравнению (2.2) в каждой точке интервала $(0,R)$, а также краевым условиям (1.5), понимаемым в обычном смысле, будем называть *классическим решением* задачи (2.2), (1.5).

Наша цель в этом параграфе получить априорную оценку решения задачи (2.2), (1.5), не зависящую от параметра регуляризации. Введем функцию $H(r) = M_*(R-r)$, $M_* = \frac{M}{R}$, $M \in \mathbb{V}$.

Лемма 2.1. *Пусть F определена на множестве* $([0,R] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $p(r) \in \mathbb{C}^1[0,R]$, $p'(r) \le 0$, $r \in (0,R)$, *выполнены условия* (1.7), (1.14) *и* $\varepsilon < \varepsilon_0 = (\alpha-1+\delta_2)M_*^\alpha$. *Тогда для любого классического решения задачи* (2.2), (1.5) *имеет место следующая оценка*

$$|u(r)| \le M_0, \quad r \in [0,R].$$

Доказательство. Определим линейный оператор

$$Lz \equiv -a_\varepsilon(r, u')z''.$$

Введем функцию $v(r) = u(r) - H(r)$. Рассмотрим разность

$$Lu - LH = Lv = -a_\varepsilon(r, u')v'' =$$

$$= \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u' + b_\varepsilon(r, u') + U_M(u) + g_M(r, u, u') + f(r). \qquad (2.3)$$

Пусть в точке $r = r_0 \in (0, R)$ функция $v(r)$ достигает положительного максимума, тогда

$$Lv|_{r=r_0} = -a_\varepsilon(r, u')v''|_{r=r_0} \geq 0.$$

С другой стороны, в точке r_0 имеют место следующие соотношения $u(r_0) > H(r_0) > 0$, $v'(r_0) = u'(r_0) - H'(r_0) = 0$, $u'(r_0) = -M_*$.

Таким образом, из (2.3) получаем

$$Lv|_{r=r_0} =$$

$$= \left[\frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u' + b_\varepsilon(r, u') + U_M(u) + g_M(r, u, u') + f(r)\right]\Big|_{r=r_0} =$$

$$-\frac{n-1}{r_0}(M_*^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r_0)-2}{\alpha}} M_* + \frac{1}{\alpha}|p'(r_0)| M_*(M_*^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r_0)-2}{\alpha}} \ln(M_*^\alpha + \varepsilon) +$$

$$[U_M(u) + g_M(r, u, u') + f(r)]\Big|_{r=r_0}. \qquad (2.4)$$

Используя неравенство для ε, сформулированное в лемме 2.1, условие (1.7) и тот факт, что $p(r_0) < 2$, $\alpha + \delta_2 > 1$, получаем

$$\frac{n-1}{r_0}(M_*^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r_0)-2}{\alpha}} M_* > \frac{n-1}{r_0}(\alpha + \delta_2)^{\frac{p(r_0)-2}{\alpha}} M_*^{p(r_0)-1} \geq$$

$$> \frac{n-1}{r_0}(\alpha + \delta_2)^{\frac{\delta_1 - 1}{\alpha}} M_*^{p(r_0)-1}. \qquad (2.5)$$

Более того, легко видеть, что из $p(r_0) < 2$ и условия на ε следует

$$\frac{1}{\alpha}|p'(r_0)| M_*(M_*^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r_0)-2}{\alpha}} \ln(M_*^\alpha + \varepsilon) \leq \frac{1}{\alpha}|p'(r_0)| M_*^{p(r_0)-1} \ln(M_*^\alpha(\alpha + \delta_2)). \qquad (2.6)$$

Из (2.4) – (2.6) вытекает, что

$$Lv|_{r=r_0} < -\frac{n-1}{r_0}(\alpha + \delta_2))^{\frac{\delta_1 - 1}{\alpha}} M_*^{p(r_0)-1} +$$

$$\frac{1}{\alpha}|p'(r_0)|M_*^{p(r_0)-1}\ln(M_*^\alpha(\alpha+\delta_2))+M^m+F_+. \tag{2.7}$$

Рассмотрим функцию

$$A(\alpha)=\frac{n-1}{r_0}(\alpha+\delta_2))^{\frac{\delta_1-1}{\alpha}}M_*^{p(r_0)-1}-\frac{1}{\alpha}|p'(r_0)|M_*^{p(r_0)-1}\ln(M_*^\alpha(\alpha+\delta_2)).$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что при $\alpha=1-\delta_2$ функция $A(\alpha)$ достигает максимума

$$\max_{\alpha\geq 1-\delta_2}A=A(1-\delta_2)=\frac{n-1}{r_0}M_*^{p(r_0)-1}-|p'(r_0)|M_*^{p(r_0)-1}\ln\, M_*.$$

Таким образом, если выполнено (1.8), то тогда существует $\alpha_*\in\mathbb{A}$ такое, что $A(\alpha_*)<A(1-\delta_2)$ и

$$M^m+F_+<A(\alpha_*)<A(1-\delta_2).$$

Тогда из (2.7) немедленно следует $Lv|_{r=r_0}<0$, что противоречит тому, что в $r=r_0\in(0,R)$ функция $v(r)$ достигает положительного максимума.

Переходим к исследованию поведения $v(r)$ на границе. В точке $r=0$ имеем $v'(0)=u'(0)-H'(0)=M_*>0$, значит $r=0$ не является точкой положительного максимума функции v. Если же теперь $r=R$ то $v(r)=u(R)-H(R)=0$. Следовательно,

$$u(r)\leq H(r). \tag{2.8}$$

Получим теперь оценку на функцию u снизу, для этого рассмотрим функцию $w=u(r)+H(r)$. Пусть в точке $r=r_1\in(0,R)$ функция w достигает отрицательного минимума, тогда

$$Lw\Big|_{r=r_0}=-a_\varepsilon(u_r)w_{rr}\Big|_{r=r_0}\leq 0. \tag{2.9}$$

С другой стороны, в точке r_1 имеют место следующие соотношения

$$w(r_1)=u(r_1)+H(r_1)<0,\ w'(r_1)=u'(r_1)+H'(r_1)=0,\ u'(r_1)=M_*.$$

По аналогии с (2.3), (2.4), получим

$$Lw\Big|_{r=r_1}=$$

$$=\left[\frac{n-1}{r}(u'^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'+b_\varepsilon(r,u')+u|u|^{m-1}+g(r,u,u')+f(r)\right]\Big|_{r=r_1}=$$

$$\frac{n-1}{r_1}(M_*^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r_1)-2}{\alpha}}M_* - \frac{1}{\alpha}|p'(r_1)|M_*(M_*^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r_1)-2}{\alpha}}\ln(M_*^\alpha+\varepsilon)+$$

$$\left[u|u|^{m-1}+g(r,u,M_*)+f(r)\right]\Big|_{r=r_1} \geq$$

$$\frac{n-1}{r_1}(\alpha+\delta_2))^{\frac{\delta_1-1}{\alpha}}M_*^{p(r_1)-1} - \frac{1}{\alpha}|p'(r_1)|M_*^{p(r_1)-1}\ln(M_*^\alpha(\alpha+\delta_2)) - M^m + F_- \tag{2.10}$$

Таким образом, если выполнено (1.8), то тогда существует $\alpha_* \in \mathbb{A}$ такое, что $A(\alpha_*) < A(1-\delta_2)$ и

$$M^m - F_- < A(\alpha_*) < A(1-\delta_2).$$

Тогда из (2.10) немедленно следует $Lw|_{r=r_1} > 0$, что противоречит (2.9) и означает, что в $r = r_1$ функция $w(r)$ не может достигать отрицательного минимума.

Переходим к исследованию поведения $w(r)$ на границе. В точке $r = 0$ имеем $w'(0) = u'(0) + H'(0) = -M_* < 0$, значит $r = 0$ не является точкой отрицательного минимума функции w. Если же теперь $r = R$ то $v(r) = u(R) + H(R) = 0$. Следовательно,

$$u(r) \geq -H(r). \tag{2.11}$$

Таким образом, из (2.8), (2.11) вытекает, что

$$|u(r)| \leq H(r) \leq H(0) = M \quad \forall r \in [0, R].$$

Учитывая (1.9), получаем искомую оценку $|u(r)| \leq M_0$.

□

§ 3. Априорная оценка производной решения регуляризованной задачи

Перейдем к оценке производной классического решения регуляризованной задачи. Прежде всего отметим , что учитывая априорую оценку решения, полученную в предыдущем параграфе, а также вид срезок U_M и g_M, уравнение (2.2) можно записать в виде

$$-a_\varepsilon(r,u')u'' - \frac{n-1}{r}(u'^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u' - b_\varepsilon(r,u') = u|u|^{m-1} + g(r,u,u') + f(r). \tag{3.1}$$

Введем функцию

$$\Phi(\tau) = -C\frac{\tau^2}{2} + (1+R)C\tau,$$

где $\tau \in [0.R]$, C определяется из (1.10).

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия Леммы 2.1. Более того, пусть* $p(r) \in \mathbb{C}^2(0,R) \cap \mathbb{C}^1[0,R]$, $p''(r) \le 0$ *при* $r \in (0,R)$ *и выполнены условия* (1.11) − (1.13). *Тогда для любого классического решения задачи* (3.1), (1.5) *выполнена следующая оценка*

$$|u'(r)| \le \Phi'(0), \quad r \in [0,R].$$

Доказательство. Запишем уравнение (3.1) в двух различных точках $r = x$ и $r = y$

$$-a_\varepsilon(x,u_x(x))u_{xx}(x) - \frac{n-1}{x}\left(u_x^\alpha(x)+\varepsilon\right)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u_x(x) - b_\varepsilon(x,u'(x)) =$$

$$u(x)|u(x)|^{m-1} + g(x,u(x),u'(x)) + f(x), \tag{3.2}$$

$$-a_\varepsilon(y,u_y(y))u_{yy}(y) - \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha(y)+\varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u_y(y) - b_\varepsilon(y,u'(y)) =$$

$$u(y)|u(y)|^{m-1} + g(y,u(y),u'(y)) + f(y), \tag{3.3}$$

где $x, y \in (0,R)$. Вычитая (3.3) из (3.2), получаем

$$-a_\varepsilon(x,u_x(x))u_{xx}(x) + a_\varepsilon(y,u_y(y))u_{yy}(y) - b_\varepsilon(x,u'(x)) + b_\varepsilon(y,u'(y)) -$$

$$\frac{n-1}{x}(u_x^\alpha(x)+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u_x(x) + \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha(y)+\varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u_y(y) =$$

$$u(x)|u(x)|^{m-1} - u(y)|u(y)|^{m-1} + g(x,u(x),u'(x)) - g(y,u(y),u'(y)) + f(x) - f(y). \tag{3.4}$$

Рассмотрим функцию $V(x,y) = u(x) - u(y)$ с учетом соотношения $V_{xx} = u_{xx}$ $\quad V_{yy} = -u_{yy}$ запишем (3.4) следующим образом

$$-a_\varepsilon(x,u_x)V_{xx} - a_\varepsilon(y,u_y)V_{yy} =$$

$$\frac{n-1}{x}(u_x^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u_x - \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u_y + b_\varepsilon(x,u'(x)) - b_\varepsilon(y,u'(y)) +$$

$$u(x)|u(x)|^{m-1} - u(y)|u(y)|^{m-1} + g(x,u(x),u'(x)) - g(y,u(y),u'(y)) + f(x) - f(y).$$

Определим линейный оператор

$$\widetilde{L}z \equiv -a_\varepsilon(x,u_x)z_{xx} - a_\varepsilon(y,u_y)z_{yy}.$$

функция $\Phi(x-y)$ удовлетворяет

$$\widetilde{L}\Phi = -a_\varepsilon(x,u_x)\Phi_{xx} - a_\varepsilon(y,u_y)\Phi_{yy} = (a_\varepsilon(x,u_x) + a_\varepsilon(y,u_y))C_1.$$

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 93-112
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 93-112

Положим

$$W(x,y) = V(x,y) - \Phi(x-y).$$

Тогда

$$\widetilde{L}W = -a_\varepsilon(x,u_x)W_{xx} - a_\varepsilon(y,u_y)W_{yy} = \tilde{L}V - \tilde{L}\Phi =$$

$$\frac{n-1}{x}(u_x^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}u_x - \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}}u_y + b_\varepsilon(x,u'(x)) - b_\varepsilon(y,u'(y)) +$$

$$u(x)|u(x)|^{m-1} - u(y)|u(y)|^{m-1} + g(x,u(x),u'(x)) - g(y,u(y),u'(y)) + f(x) - f(y) -$$

$$(a_\varepsilon(x,u_x) + a_\varepsilon(y,u_y))C_1. \tag{3.5}$$

Рассмотрим (3.5) в области $P = \{(x,y) : \ x \in (0,R),\ y \in (0,R),\ x > y\}$.

Предположим, что в некоторой точке $Q_0 = (x_0, y_0) \in P$ функция $W(x,y)$ достигает положительного максимума. Тогда $W_{xx}(x_0,y_0) \le 0$, $W_{yy}(x_0,y_0) \le 0$ и, как следствие,

$$\widetilde{L}W\Big|_{Q_0} \ge 0. \tag{3.6}$$

В то же время в точке Q_0 имеют место следующие соотношения

$$W_x(x_0,y_0) = W_y(x_0,y_0) = 0, \quad u_x(x_0) = u_y(y_0) = \Phi'(x_0-y_0), \quad u(x_0) > u(y_0). \tag{3.7}$$

Заметим, что из $p' \le 0$, учитывая (3.7), следует

$$\left[\frac{n-1}{x}(u_x^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}u_x - \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}}u_y\right]\Big|_{Q_0} < 0. \tag{3.8}$$

Далее, из $p'' \le 0$, учитывая (3.7), следует

$$[b_\varepsilon(x,u'(x)) - b_\varepsilon(y,u'(y))]\Big|_{Q_0} \le 0. \tag{3.9}$$

Нетрудно показать прямым дифференцированием, что функция

$$a_\varepsilon(r,\Phi') = ((\Phi')^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}-1}((p(r)-1)(\Phi')^\alpha+\varepsilon)$$

является возрастающей по параметру ε при $1 < p < 2$, если $\varepsilon < \varepsilon_0 = (\alpha - 1 + \delta_2)M_*^\alpha$. Откуда вытекает

$$a_\varepsilon(r,\Phi') = ((\Phi')^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}-1}((p(r)-1)(\Phi')^\alpha+\varepsilon) \ge (p(r)-1)(\Phi')^{p(r)-2}. \tag{3.10}$$

Из $\Phi' \le (1+R)C$ вытекает $(\Phi')^{p(r)-2} \ge (1+R)^{p(r)-2}C^{p(r)-2}$. Следовательно, из (3.10) имеем

$$a_\varepsilon(r,\Phi')C \ge (p(r)-1)(1+R)^{p(r)-2}C^{p(r)-1}. \tag{3.11}$$

Заметим, что $a_\varepsilon(x_0, \Phi'(x_0 - y_0)) \le a_\varepsilon(y_0, \Phi'(x_0 - y_0))$. Из (1.10), (3.5), (3.8)–(3.11) следует

$$\widetilde{L}W\Big|_{Q_0} \le g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) +$$

$$2M^m + 2f_0 - (a_\varepsilon(x_0, \Phi'(x_0 - y_0) + a_\varepsilon(y_0, \Phi'(x_0 - y_0))C \le$$
$$g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) +$$
$$2M^m + 2f_0 - 2(p(x_0) - 1)(1 + R)^{p(x_0)-2}C^{p(x_0)-1} \le$$
$$g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)). \tag{3.12}$$

Чтобы получить противоречие с (3.6), покажем, что

$$g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) \le 0. \tag{3.13}$$

Представим (3.13) в следующем виде

$$g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) =$$

$$[g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0))) - g(y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0))] +$$
$$[g(y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0))]. \tag{3.14}$$

Используя условия (1.11), (1.12), из (3.14) получим

$$g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) \le$$

$$\Big[K\Big(x_0, y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0))\Big)(x_0 - y_0) -$$

$$\gamma\Big(x_0, u(x_0), u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)\Big)(u(x_0) - u(y_0))\Big]. \tag{3.15}$$

В точке максимума

$$u(x_0) - u(y_0) > \Phi(x_0 - y_0) = \Phi(x_0 - y_0) - \Phi(0) =$$

$$\Phi'(\xi)(x_0 - y_0) = \Phi'\left(\frac{x_0 - y_0}{2}\right)(x_0 - y_0). \tag{3.16}$$

Положим, для упрощения записи

$$K(x_0, y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) = K(\cdot, \Phi'(x_0 - y_0)),$$

$$\gamma(x_0, u(x_0), u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) = \gamma(\cdot, \Phi'(x_0 - y_0)).$$

Используя (1.13), (3.16) и равенство $\Phi'(\tau) = -C\tau + (1 + R)C$, неравенство (3.15) можно переписать в виде

$$g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) \le$$

$$\left[K(\cdot,\Phi'(x_0-y_0))-\gamma(\cdot,\Phi'(x_0-y_0))\Phi'\left(\frac{x_0-y_0}{2}\right)\right](x_0-y_0)=$$

$$\left[K(\cdot,C_2-C_1(x_0-y_0))-\gamma(\cdot,C(1+R-(x_0-y_0))C\left(1+R-\frac{1}{2}(x_0-y_0)\right)\right]$$

$$(x_0-y_0)\le 0.$$

Таким образом, $\widetilde{L}W\Big|_{Q_0}<0$ и, как следствие, W не может достигать положительного максимума внутри P.

Рассмотрим W на границе ∂P.

1. при $x=R$, $y\in[0,R]$ имеем

$$W(x,y)\Big|_{x=R}=u(R)-u(y)-\Phi(R-y)<-u(y)-\Phi(R-y)\le 0.$$

Это следует, из того, что $\Phi(R-y)\ge H(y)$ при $C\ge\frac{2M}{R(R+2)}$.

2. При $x=y$ имеем

$$W(x,y)|_{x=y}=u(x)-u(y)-\Phi(x-y)|_{x=y}=-\Phi(0)=0.$$

3. При $y=0$, $x\in[0,R]$

$$W_y(x,y)\Big|_{y=0}=-u_y(0)+\Phi'(x)=\Phi'(x)\ge C>0.$$

Это означает, что W не может достигать положительного максимума на этой части границы. Итак, мы заключаем что $W(x,y)\le 0$, откуда следует

$$u(x)-u(y)\le\Phi(x-y)\quad\text{в}\quad\overline{P}.\tag{3.17}$$

Оценим разность $u(x)-u(y)$ снизу. Рассмотрим функцию $\widetilde{\widetilde{W}}=\widetilde{V}(x,y)-\Phi(x-y)=u(y)-u(x)-\Phi(x-y)$. Вычитая (3.2) из (3.3), получаем

$$-a_\varepsilon(y,u_y)u_{yy}+a_\varepsilon(x,u_x)u_{xx}=$$

$$-\frac{n-1}{x}(u_x^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}u_x+\frac{n-1}{y}(u_y^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}}u_y-b_\varepsilon(x,u'(x))+b_\varepsilon(y,u'(y))+$$

$$-u(x)|u(x)|^{m-1}+u(y)|u(y)|^{m-1}-g(x,u(x),u'(x))+g(y,u(y),u'(y))-f(x)+f(y).$$

С учетом соотношений $\widetilde{V}_{xx}=-u_{xx}$, $\widetilde{V}_{yy}=u_{yy}$, получаем

$$\tilde{L}\widetilde{V}-\tilde{L}\Phi=\tilde{L}\widetilde{\widetilde{W}}=$$

$$-\frac{n-1}{x}(u_x^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}u_x+\frac{n-1}{y}(u_y^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}}u_y-b_\varepsilon(x,u'(x))+b_\varepsilon(y,u'(y))-$$

$$u(x)|u(x)|^{m-1}+u(y)|u(y)|^{m-1}-g(x,u(x),u'(x))+g(y,u(y),u'(y))-$$
$$f(x)+f(y)-(a_\varepsilon(x,u_x)+a_\varepsilon(y,u_y))C. \qquad (3.18)$$

Предположим, что в некоторой точке $Q_1=(x_1,y_1)\in P$ функция $\widetilde{W}(x,y)$ достигает своего положительного максимума. Тогда,

$$\widetilde{W}_x(x_1,y_1)=\widetilde{W}_y(x_1,y_1)=0,$$

$$u_x(x_1)=u_y(y_1)=-\Phi'(x_1-y_1),\ u(y_1)>u(x_1),\ L\widetilde{W}\Big|_{Q_1}\geq 0. \qquad (3.19)$$

С другой стороны, из (1.10),(3.8)–(3.11), (3.18) и четности функции a_ε, по аналогии с (3.12) – (3.16), следует

$$L\widetilde{W}\Big|_{Q_1}<0,$$

что противоречит последнему соотношению в (3.19), а, следовательно, предположению о том, что $\widetilde{W}$ достигает своего положительного максимума внутри P.

Рассмотрим $\widetilde{W}$ на ∂P.

1. При $x=R, y\in[0,R]$

$$\widetilde{W}(x,y)\mid_{x=R}=u(y)-u(R)-\Phi(R-y)<0$$

так как $\Phi(R-y)\geq H(y)$ при $C\geq\frac{2M}{R(R+2)}$.

2. При $x=y$ имеем

$$\widetilde{W}(x,y)|_{x=y}=u(y)-u(x)-\Phi(x-y)|_{x=y}=-\Phi(0)=0.$$

3. При $y=0$, $x\in[0,R]$, имеем

$$\widetilde{W}_y(x,0)=u_y(0)+\Phi'(x)=\Phi'(x)\geq C>0,$$

что означает, что $\widetilde{W}$ не может достигать своего положительного максимума и на этой части границы тоже. Таким образом, $\widetilde{W}(x,y)\leq 0$, откуда следует

$$u(y)-u(x)\leq\Phi(x-y) \quad \text{в} \quad \overline{P}. \qquad (3.20)$$

Из (3.17) и (3.20) следует $|u(x)-u(y)|\leq\Phi(x-y)$ в $\overline{P}$.

В силу симметрии переменных x, y, можно аналогичным образом рассматривать случай $x<y$, чтобы получить оценку $|u(x)-u(y)|\leq\Phi(y-x)$. Следовательно,

$$|u(x)-u(y)|\leq\Phi(|x-y|) \quad \text{в} \quad \overline{P}.$$

Замечая, что $\Phi(0) = 0$, мы можем переписать последнее неравенство в виде

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \le \frac{\Phi(|x - y|) - \Phi(0)}{|x - y|},$$

откуда сразу следует требуемая оценка градиента

$$|u'(x)| \le \Phi'(0), \quad x \in [0, R].$$

□

Замечание. Для получения оценки производной решения можно ослабить требования непрерывности по Липшицу функции g по переменной r, потребовав от $g(r, u, u')$ только лишь непрерывности по совокупности переменных и выполнения несколько более обременительных структурных условий вида

$$g(s, u_1, q) - g(r, u_2, q) \le 0, \quad g(r, u_1, -q) - g(s, u_2, -q) \le 0$$

Легко видеть, что в этом случае доказательство леммы 3.1 заканчивается на неравенстве (3.12).

§ 4. Доказательство теорем существования

Рассмотрим решение u_ε регуляризованного уравнения

$$-((u_\varepsilon')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u_\varepsilon')' - \frac{n-1}{r}((u_\varepsilon')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u_\varepsilon' = u_\varepsilon |u_\varepsilon|^{m-1} + g(r, u_\varepsilon, u_\varepsilon') + f(r), \tag{4.1}$$

вместе с краевым условием (1.5), которые мы запишем для u_ε

$$u_\varepsilon'(0) = 0, \quad u_\varepsilon(R) = 0. \tag{4.2}$$

Для того, чтобы доказать существование классического решения задачи (4.1), (4.2) необходимо показать, что выражение $\frac{n-1}{r}((u_\varepsilon')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u_\varepsilon'$ ограничено при $r \to 0$. Обозначим через $Z(r) = ((u_\varepsilon')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u_\varepsilon'$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 4.1. *Если u_ε является классическим решением задачи* (4.1), (4.2), *тогда $Z(r) \in \mathbb{C}^1[0, R)$ и*

$$Z'(0) = -\frac{F(0, u_\varepsilon(0), 0)}{n}.$$

Доказательство этой леммы без предварительной регуляризации в случае $F \equiv 0$ приведено в [14]. Для уравнения вида (4.1) с постоянным показателем p доказательство можно посмотреть в [15]. Но это же самое доказательство, без каких-либо изменений, может быть использовано и в случае $p = p(r)$, так как используется представление регуляризованного уравнения в дивергентном виде и член $b_\varepsilon(r, u'_\varepsilon)$ не возникает.

Перейдем к доказательству существования классического решения задачи (4.1), (4.2).

Теорема 4.2. *Пусть* $F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) \in \mathbb{C}([0, R] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $p(r) \in \mathbb{C}^2(0, R) \cap \mathbb{C}([0, R])$, $p' \le 0$, $p'' \le 0$ *и выполнены условия* (1.6), (1.7), (1.11)−(1.14). *Тогда существует классическое решение задачи* (4.1), (4.2) *такое, что функция* $u'_\varepsilon(r)$ *непрерывна по Липшицу на* $[0, R)$ *и* $u(r)$ *удовлетворяет следующим оценкам*

$$|u_\varepsilon| \le M_0, \quad |u'_\varepsilon| \le (1 + R)C, \quad r \in [0, R],$$

где M_0 *из* (1.9), C *из* (1.10).

Доказательство. Из леммы 4.1 вытекает равномерная по ε ограниченность Z' в $[0, R)$ и, как следствие, непрерывность по Липшицу функции $u'_\varepsilon(r)$ с постоянной Липшица, не зависящей от ε. Положим

$$G(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) = u_\varepsilon |u_\varepsilon|^{m-1} + g(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) + f(r) + b_\varepsilon(r, u')$$

и перепишем (4.1) в виде

$$-a_\varepsilon(u'_\varepsilon)u''_\varepsilon - \frac{n-1}{r}((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon = G(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon).$$

Для любой $z \in \mathbf{C}^1[0, R]$ функции $G(r, z, z')$ и $a_\varepsilon(r, z')$ принадлежат $\mathbf{C}[0, R]$. Положим

$$g_{(z)}(r) = \frac{((z')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}}{a_\varepsilon(r, z')} = \frac{(z')^\alpha + \varepsilon}{(p(r) - 1)(z')^\alpha + \varepsilon}, \quad G_{(z)}(r) = -\frac{G(r, z, z')}{a_\varepsilon(z')}.$$

Заметим, что функции $g_{(z)}(r)$, $G_{(z)}(r)$ являются непрерывными фунциями на $[0, R]$.

Рассмотрим линейное уравнение

$$u''_\varepsilon + \frac{n-1}{r} g_{(z)}(r) u'_\varepsilon = G_{(z)}(r)$$

вместе с краевыми условиями (4.2). Эта задача эквивалентна следующей

$$u'_\varepsilon(r) = V(r), \quad V' + \frac{n-1}{r} g_{(z)}(r) V = G_{(z)}(r). \tag{4.3}$$

Легко видеть, что функция

$$u_\varepsilon = \int_R^r \int_0^s e^{-\int_t^s \frac{n-1}{\lambda} g_{(z)}(\lambda) d\lambda} G_{(z)}(t) dt\, ds$$

дает единственное решение задачи (4.3), (4.2) и принадлежит $\mathbf{C}^2(0,R)\cap\mathbf{C}^1[0,R]$. Результаты лемм 2.1, 3.1 и упомянутое выше следствие из леммы 4.1, позволяют применить принцип неподвижной точки [16] для доказательства существования решения задачи (4.1), (4.2). Применение теоремы Лерэ-Шаудера требует наличия априорных оценок в семействе уравнений с параметром, где параметр входит в уравнение как множитель при младших членах, т.е. семейство имеет вид

$$-a_\varepsilon(r,u'_\varepsilon)u''_\varepsilon=\sigma\left(\frac{n-1}{r}(u'^\alpha_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_\varepsilon+G(r,u_\varepsilon,u'_\varepsilon)\right),$$

где $\sigma\in[0,1]$ [16], Гл. 11, теорема 11.3 . Учитывая специфику вхождения параметра σ и его пределы изменения, выполнение всех оценок и условий легко можно проверить. Теорема доказана. □

Доказательство Теоремы 1.2. Рассмотрим уравнение (4.1). Домножая (4.1) на $\phi\in\mathbb{C}_0^\infty(0,R)$ и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^R((u'_\varepsilon)^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_\varepsilon\phi'\,dr-\int_0^R\frac{n-1}{r}((u'_\varepsilon)^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_\varepsilon\phi\,dr=$$
$$\int_0^R F(r,u_\varepsilon,u'_\varepsilon)\phi(r)dr. \tag{4.4}$$

Из Лемм 2.1, 3.1, 4.1 вытекает существование подпоследовательности $\varepsilon_n\to 0$ такой, что

$$u_{\varepsilon_n}(r)\to u(r),\quad u'_{\varepsilon_n}(r)\to u'(r)\quad \text{в}\quad \mathbb{C}[0,R], \tag{4.5}$$

откуда, в силу непрерывности функции F по совокупности своих переменных, сразу следует

$$F(r,u_{\varepsilon_n},u'_{\varepsilon_n})\to F(r,u,u')\quad \text{в}\quad \mathbb{C}[0,R].$$

Также из (4.5) мы получаем

$$\left(u'_{\varepsilon_n}\right)^\alpha+\varepsilon_n\to(u')^\alpha\quad \text{в}\quad \mathbb{C}[0,R],$$
$$\left(\left(u'_{\varepsilon_n}\right)^\alpha+\varepsilon_n\right)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_{\varepsilon_n}\to|u'|^{p(r)-2}u'\quad \text{в}\quad \mathbb{C}[0,R]. \tag{4.6}$$

Из (4.6) и того факта, что функция $\frac{\phi(r)}{r}$ непрерывна на $[0,R]$ вытекает, что

$$\int\limits_0^R\frac{n-1}{r}\left(\left(u'_{\varepsilon_n}\right)^\alpha+\varepsilon_n\right)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_{\varepsilon_n}\phi\,dr\to\int\limits_0^R\frac{n-1}{r}|u'|^{p(r)-2}u'\phi\,dr.$$

Учитывая равномерную по ε ограниченность Z' в $[0, R)$ и, как следствие, непрерывность по Липшицу функции $u'_\varepsilon(r)$ с постоянной Липшица, не зависящей от ε, переходя к пределу в (4.4) при $\varepsilon \to 0$, получаем, что $u = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ является искомым слабым радиально-симметричным решением задачи (1.4), (1.5).

$\square$

Список литературы

1. *Dall'Aglio A., Giachetti D., Segura de Leon S.* Global existence for parabolic problems involving the p-Laplacian and a critical gradient term // *Indiana Univ. Math. J.* 2009. V. 58, N 1. pp. 1 - 48.

2. *Dall'Aglio A., De Cicco V., Giachetti D., Puel J.-P.* Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains // *Nonlinear differ. equ. appl.* // 2004. V. 11, N 4. pp. 431 - 450.

3. *Bueno H., Ercole G., Ferreira W.M. and Zumpano A.* Positive Solutions for the p-Laplacian with Dependence on the Gradient // *Nonlinearity.* 2012. V. 25, N 4. 1211

4. *Figueiredo D.G., Sanchez J., Ubilla P.* Quasilinear equations with dependence on the gradient // *Nonlinear Anal.* 2009. V. 71, pp. 4862 - 4868.

5. *Iturriaga L., Lorca S., Sanchez J.* Existence and multiplicity results for the p-Laplacian with a p-gradient term // *Nonlinear differ. equ. appl.* 2008. V. 15, pp. 729 - 743.

6. *Jinkai Li, Jingxue Yin, Yuanyuan Ke.* Existence of positive solutions for the p-Laplacian with p-gradient term // *J. Math. Anal. Appl.* 2011. V. 383, N. 1. pp. 147 - 158.

7. *Ruiz D.* A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems // *J. Differential Equations* 2004. V. 199, N. 1. pp. 96 - 114.

8. *Ragusa M.A., Razani A., Safari F.* Existence of radial solutions for a $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem // *Adv. in Difference Eq.* 2021. V., 2021, Art. 215.

9. *Zhang Q.* Existence of radial solutios for the $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ // *J. Math. Anal. Appl.* 2006, V. 315, N. 12. pp. 506 - 516.

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 93-112
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 93-112

10. *Liang Y., Zhang Q., Zhao C.* On the boundary blow-up solutions of $p(x)$-Laplacian equations with gradient terms // *Taiwanese J. Math.* 2014. V. 18, N. 2. pp. 599 - 632.

11. *Bueno H., Ercole G.* A quasilinear problem with fast growing gradient // *Appl. Math. Letters.* 2013. V. 26, N. 4, pp. 520 - 523.

12. *Tersenov Ar.S.* Radially symmetric solutions of the p-Laplace equation with gradient terms // J. Appl. Ind. Math. 2018. V. 12, N. 4. pp. 770 - 784.

13. *Tersenov Ar.S.* On the existence of radially symmetric solutions for the p-Laplace equation with strong gradient nonlinearities // *Sib. Math. J.* 2023. V. 64, N. 6, pp. 1443 - 1454.

14. *Franchi B., Lanconelli E., Serrin J.* Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in R^n // *Adv. in Math.* 1996. V. 118, N. 2. pp. 177 - 243.

15. *Tersenov Ar.S., Safarov R.Ch.* On radially symmetric solutions of the third boundary value problem for a p-Laplace equation // *Math. Notes of NEFU.* 2024. V. 31, N. 4. pp. 64 - 81.

16. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, (2nd ed.), Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 1983.

Информация об авторах

Арис Саввич Терсенов, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
AuthorID: 6096
Scopus Author ID 6603037741
Расул Чориёр угли Сафаров, аспирант

Author Information

Aris S. Tersenov, Doctor of Mathematics, Senior researcher
AuthorID: 6096
Scopus Author ID 6603037741
R. Ch. Safarov, graduate student

Статья поступила в редакцию 18.12.2025;
одобрена после рецензирования 24.03.2026; принята к публикации 06.05.2026

The article was submitted 18.12.2025;
approved after reviewing 24.03.2026; accepted for publication 06.05.2026

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 93-112
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 93-112